# Введение

Теория рекурсивных функций является одним из фундаментальных разделов математической логики и теоретической информатики. Она занимается формализацией алгоритмически вычислимых функций и даёт строгую основу для понимания пределов вычислений. В этой области важное место занимает понятие частично определённой рекурсии, которая описывает функции, значение которых может быть не определено на некоторых входах. Это расширяет класс примитивно-рекурсивных функций, где вычисление всегда заканчивается за конечное время.

Центральным элементом теории частично рекурсивных функций выступает μ-оператор (оператор минимизации). Он позволяет описывать вычислительные процессы, в которых осуществляется перебор значений до тех пор, пока не будет найдено первое, удовлетворяющее заданному условию. При этом, если такое значение не существует, функция остаётся неопределённой. Таким образом, μ-оператор формирует переход от всюду определённых функций (примитивных) к частично определённым, расширяя вычислительную мощность формализма, но за счёт потери гарантированной завершённости.

Также важно понимать различие между примитивной рекурсией, где результат вычисления всегда существует и достигается за конечное число шагов, и частичной рекурсией, в которой наличие результата зависит от условий выполнения. Частичная определённость позволяет более гибко моделировать реальные алгоритмические процессы, включая потенциально бесконечные циклы и условия остановки, которые могут не наступить.

В данной работе будут рассмотрены основные свойства частично рекурсивных функций, а также проведено исследование поведения μ-оператора на конкретных примерах. Цель — проанализировать, как использование минимизации влияет на определённость функций и каким образом она влияет на вычислимость.

Что такое частично определённая рекурсия

Это вид рекурсивных функций, которые не обязательно определены на всех входах. То есть, для некоторых значений аргумента функция может:

* не завершиться
* «зависнуть» в бесконечной рекурсии
* или просто быть неопределённой

Что такое μ-оператор

μ-оператор (произносится как "мю-оператор") обозначает поиск наименьшего значения, при котором выполняется заданное логическое условие.

Этот оператор используется в частично определённых рекурсивных функциях, потому что если нужного y не существует, то функция φ(x) не определена.

Задание 1. Найти аналитическое выражение функции φ(x), если

f(x, y) = dif(12, mul(x, y)), и вычислить значение φ(6) с помощью μ-оператора.

Решение:

1. Расшифруем обозначения:

* mul(x, y) – функция умножения x ⋅ y
* dif(a, b) – функция вычитания
* Следовательно, f(x, y) = 12 – x ⋅ y

1. Определим функцию φ(x) через μ-оператор:

По определению, использование μ-оператора означает:

φ(x) = μy.(f(x, y) = 0)

То есть, мы ищем наименьшее y, при котором

12 - x ⋅ y = 0 ⇒ 12 = x ⋅ y

Таким образом:

φ(x) = μy.(x ⋅ y = 12)

1. Найдём аналитическое выражение φ(x):

Нужно найти наименьшее натуральное y, при котором x ⋅ y ≥ 12. Это означает:

y ≥ ⇒ φ(x) = – если делится без остатка, иначе не определена

1. Вычислим значение φ(6):

φ(6) = = 2

Проверим:

f(6, 1) = 12 - 6 = 12 - 6 = 6 ≠ 0

f(6, 1) = 12 - 6 = 12 - 6 = 6 = 0 – условие выполнено

Ответ:

Аналитическое выражение – φ(x) =

Значение – φ(6) = 2

Это задание пример вычислимой, но частично определенной функции: φ(x) определена только для тех x, для которых существует такое y, при котором x ⋅ y = 12.

Например, φ(5) не определена, так как 12 не делится на 5 нацело.

Задание 2. С помощью μ-оператора найти корни уравнения.

а) x2 - x - 2 = 0

Решение:

x2 - x - 2 = (x – 2)(x + 1) = 0 ⇒ x = 2, x = -1

Ответ: μy.( x2 - x – 2 = 0) = 2, так как μ-оператор в теории частично рекурсивных функций работает только на множестве натуральных чисел.

б) 2x = x2

Решение:

Преобразуем уравнение к виду:

2x = x2 ⇒2x - x2 = 0

Искомое значение – это наименьшее натуральное x, при котором разность равна нулю. Это можно записать с использованием μ-оператора:

μx.(2x − x2 = 0)

Подставим значения:

x = 0 ⇒ 20 – 02 = 1

x = 1 ⇒ 21 – 12 = 1

x = 2 ⇒ 22 – 22 = 0

Ответ: μx.(2x − x2 = 0)

в) log2x - || = 0

Работаем в рамках теории частично рекурсивных функций. Все функции определены на множестве натуральных чисел (включая 0), и используются только допустимые конструкции: элементарные арифметические операции, целочисленные логарифмы, деление без остатка, а также минимизация (μ-оператор).

В уравнении встречаются:

log2x — трактуем как наибольшее целое n, такое что 2n ≤ x

|| — целочисленное деление x на 4 (или же, x div 4)

Перепишем с использование μ-оператора:

μx.(log2x - (x div 4) = 0)

Подставим значения

x = 1 ⇒ log21 – (1 div 4) = 0

Ответ: x = 1

Задание 2.